Teoretická část - 31.5.2022

1. (a) Definujte prostory $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (2 body).
   (b) Definujte posunutí, škálování, derivaci a násobení funkcí v $\mathcal{D}'(\Omega)$ (2 body).
   (c) Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení pvrky $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
      i. $\varphi \mapsto \varphi'''(0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
      ii. $\varphi \mapsto 2\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
      iii. $\varphi \mapsto (\varphi(-\pi))^{77}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
      iv. $\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n^2)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
      v. $\varphi \mapsto \int_0^3 (\varphi(x))^{73}\, dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
      vi. $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} x^{79} \varphi''(x)\, dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

      Vše řádně zdůvodněte (2.5 bodu).
   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
      i. pokud $\sin x \cdot T = \sin x \cdot S$, potom $T = S$,
      ii. pokud $(\pi + \sin x) \cdot T = (\pi + \sin x) \cdot S$, potom $T = S$,
      iii. pokud $T = S$, potom $\sin x \cdot T = \sin x \cdot S$,
      iv. pokud $T = S$, potom $(\pi + \sin x) \cdot T = (\pi + \sin x) \cdot S$.

      Vše řádně zdůvodněte $(1,5$ bodu).

2. (a) Definujte křivkový integrál v $\mathbb{C}$, primitivní funkci (v $\mathbb{C}$) a křivkovou souvislost otevřených podmnožin $\mathbb{C}$ (2 body).

   (b) Zformulujte lemma o výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce, větu o existenci primitivní funkce a Cauchyho větu (3 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro **oblast** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a funkce $f, g \in H(\Omega)$:

      i. má-li f primitivní funkci na Ω, potom má $\dfrac{1}{f}$ primitivní funkci na $\Omega \setminus \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$,
      ii. jsou-li F a G dvě primitivní funkce k f na Ω, porom existuje $C \in \mathbb{C}$, že $F - G = C$ na Ω,
      iii. pokud f ani g nemají primitivní funkci na Ω, potom $f \cdot g$ nemá primitivní funkci na Ω,
      iv. pokud f i g mají primitivní funkci na Ω, potom $f \cdot g$ má primitivní funkci na Ω.

   Vše řádně zdůvodněte (3 body).

3. (a) Definujte prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci pro prvky $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a zformulujte větu o Fourierově transformaci na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (3 body).

   (b) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení pro $\varphi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

      i. $\varphi + \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
      ii. $\varphi \cdot \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
      iii. je-li $\phi \neq 0$ na $\mathbb{R}$, potom $\dfrac{\varphi}{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
      iv. $\dfrac{\sin x}{1 + x^{12}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
      v. $\varphi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
      vi. $(\mathcal{F}(\varphi))' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
      vii. $\mathcal{F}(\phi') = (\mathcal{F}(\phi))'$.

   Vše řádně zdůvodněte (5 bodů).